Combinatoire - Méthodes Probabilistes

18 Janvier 2025 - Daniel Cortild - daniel@cortild.com

Exercices

Exercice 1 (HMMT 2006). *Dans une crèche,* 2006 *bébés sont assis en cercle. Soudainement, chaque bébé donne aléatoirement un coup à soit le bébé à sa gauche, soit le bébé à sa droite. Quelle est la valeur attendue du nombre de bébés qui ne reçoivent aucun coup?*

Exercice 2 (AHSME 1989). *Supposons que* 7 *garçons et* 13 *filles se rangent en file indienne. Soit S le nombre d'endroits dans la rangée où un garçon et une fille se tiennent côte à côte. Par exemple, pour la rangée $GBBGGGBGBGGGBGBGGBGG$, nous avons $S = 12$. Trouver la valeur attendue de S.*

Exercice 3 (NIMO 4.3). *Un jour, un fou et un cavalier se trouvaient sur des cases de la même rangée d'un échiquier infini, lorsqu'une énorme pluie de météores s'est abattue, plaçant un météore sur chaque case de l'échiquier indépendamment et aléatoirement avec une probabilité p. Ni le fou ni le cavalier n'ont été touchés, mais leurs déplacements pourraient être obstrués par les météores. Pour quelle valeur de p le nombre attendu de cases valides vers lesquelles le fou peut se déplacer (en un seul coup) est-il égal au nombre attendu de cases vers lesquelles le cavalier peut se déplacer (en un seul coup) ?*

Exercice 4 (IMO 2001/4). *Soit n un entier impair strictement supérieur à* 1 *et soit $c_1, \ldots, c_n$ une suite d'entiers positifs. Pour chaque permutation $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, on définit $S(\pi) = \sum_{i=1}^n c_i \pi_i$. Prouver qu'il existe deux permutations π et μ telles que $S(\pi) - S(\mu)$ soit divisible par $n!$.*

Problèmes

Problème 1 (Romanie 2004). *Montrer que pour tous nombres complexes $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ satisfaisant $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1$, il existe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k \right| \leq 1.$$

Problème 2. *On dit que le tournoi T possède la propriété S_k si, pour tout ensemble de k personnes, il existe une personne (externe aux k personnes) qui les bats tous.*

Si $\binom{n}{k}(1 - 2^{-k})^{n-k} < 1$, prouver qu'il existe un tournoi de taille n avec la propriété S_k.

Problème 3 (BAMO 2004). *Considérons n nombres réels non-nuls avec somme nulle. Prouver qu'on peut les énumérer $a_1, \ldots, a_n$ tel que*

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_1 < 0.$$

Problème 4 (Russie 1996). *À Duma,* 1600 *mathématiciens ont formé* 16000 *commités de* 80 *personnes chacun. Prouver qu'il existe deux commités avec au moins* 4 *membres en commun.*

Problème 5 (MOP Test 2007/7/1). *Soit $n \in \mathbb{N}$. On arrange dans une matrice $n^2 \times n^2$ les nombres $1, 2, \ldots, n^2$ tous exactement n^2 fois. Montrer qu'il existe une ligne ou une colonne avec au moins n nombres distincts.*

Problème 6 (EGMO 2019/5). *Soit $n \geq 2$ un entier, et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers positifs. Montrer qu'il existe de entiers positifs $b_1, \ldots, b_n$ tel que:*

1. *$a_i \leq b_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$,*
2. *Les valeurs de $b_1, \ldots, b_n$ sont distinctes modulo n,*
3. *$b_1 + \cdots + b_n \leq n\left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor\right)$.*

Problème 7 (Inégalité de Kraft)**.** *Un mot de longueur n, dénoté par $w = w_1 \cdots w_n$, est une suite de charactères (w_i) issus d'un alphabet fini. On dit qu'un mot $w = w_1 \cdots w_n$ est un préfixe d'un mot $v = v_1 \cdots v_m$ so $n \leq m$ et $w_i = v_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.*

Soit $\mathcal{F}$ une collection (possiblement infinie) de mots d'un alphabet à taille r, et soit N_i le nombre de mots dans $\mathcal{F}_i$ à longeur i. Supposons que $\sum_{i=1}^{\infty} N_i \cdot r^{-i} > 1$. Montrer qu'il existe deux mots distincts $w, v \in \mathcal{F}$ tel que l'un soit un préfixe de l'autre.

Problème 8 (SJSU M179 Midterm)**.** *Soit $K_{n,n}$ un graphe avec ensemble de sommets $V_1 \cup V_2$ où $|V_1| = |V_2| = n$ et ensemble d'arêtes $E = \{(a, b) \colon a \in V_1, b \in V_2\}$. Soit G un sous-graphe de $K_{n,n}$avec au moins $n^2 - n + 1$ arêtes. Montrer que G contient une correspondance parfaite, notamment qu'il soit possible de connecter chaque sommet dans V_1 à un sommet distinct de V_2 en utilisant uniquement les arêtes dans G.*

Problème 9 (IMO Shortlist 2006/C3)**.** *Soit S un ensemble fini de points dans le plan en position générale. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble de polygones convexes avec sommets dans S, et pour $P \in \mathcal{P}$, on définit $a(P)$ le nombre de points sur le périmètre de P et $b(P)$ le nombre de points extérieurs à P. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1.$$

Problème 10 (MOP Test 2008/7/2)**.** *Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor an \rfloor + \lfloor bn \rfloor = \lfloor cn \rfloor$. Montrer que au moins un des a, b, c est un entier.*

Indices

1: Soit ε_k une variable aléatoire telle que $\varepsilon_k = 1$ avec probabilité 0.5, et $\varepsilon_k = -1$ avec probabilité 0.5.
2: Sélectionnes un tournoi aléatoirement (arête entre a et b orientée (a, b) avec probabilité 0.5 et (b, a) avec probabilité 0.5), et, pour tout sous-ensemble A de sommets, considères l'événement E_A que aucun sommet externe bats tout A.
3: Choisis un ordre aléatoire. Quelle est l'espérance de $a_1 a_2$? Essaie de développer le carré $(a_1 + \cdots + a_n)^2$.
4: Choisis deux commités aléatoirement et soit X le nombre de personnes dans les deux commités. Soit X_i un indicateur pour l'événement "la personne i est dans les deux commités", tel que $X = X_1 + \cdots + X_{1600}$. Calcule $\mathbb{E}[X_i]$.
5: Pour chaque ligne et colonne, soit E_i l'indicateur (donc $E_i = 1$ si l'événement est vrai et $E_i = 0$ sinon) de l'événement "le nombre i apparaît au moins une fois dans cette ligne ou colonne".
6: Prends une permutation aléatoire π de $\{1, \ldots, n\}$, et soit b_i^π le plus petit nombre tel que $a_i \leq b_i^\pi$ satisfaisant $b_i^\pi \equiv \pi(i) \pmod{n}$.
7: Soit W un mot infini aléatoire, où chaque caractère est choisi aléatoirement avec probabilité $1/r$. Notes que si deux mots distincts sont des préfixes de W, alors l'un est un préfixe de l'autre.
8: Sélectionnes un ensemble de pairs de sommets aléatoirement, et comptes le nombre d'arêtes qui existent. On voudrait que ce nombre soit n afin d'avoir une correspondance parfaite.
9: La somme est un polynôme en x, et il est donc suffisant de montrer l'inégalité pour tout $x \in [0, 1]$. On peut donc interpréter x comme une probabilité. Colories tout point de manière aléatoire en rouge avec probabilité x et en bleu avec probabilité $1 - x$. Interprètes l'inégalité comme une espérance.
10: Si a est irrationnel, alors $\{\{an\} \colon n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément distribué sur $[0, 1]$. Ainsi, si n est choisi uniformément dans $[1, N]$, il est vrai que $\mathbb{E}[\{xn\}] \to 1/2$ lorsque $N \to \infty$. Lorsque a est rationel, ceci n'est plus vrai.